ΟΛΟΚΛΗΡΩΣΗ ΓΙΑ ΚΑΝΟΝΙΚΑ ΧΩΡΙΑ

ΟΡΙΣΜΟΣ 1ος: Αν $\varphi_1, \varphi_2 : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$ συνεχείς με $\varphi_1 \leq \varphi_2$, $\forall x \in [\alpha, \beta]$ και $B \subseteq \mathbb{R}^2$, ώστε $B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b$ και $\varphi_1(x) \leq y \leq \varphi_2(x)\}$ τότε το χωρίο B, λέγεται κανονικό χωρίο ως προς x (ή τύπου 1)

ΟΡΙΣΜΟΣ 2ος: Αν $\psi_1, \psi_2 : [c, d] \to \mathbb{R}$ συνεχείς με $\psi_1 \leq \psi_2$, $\forall y \in [c,d]$ και $A \subseteq \mathbb{R}^2$, ώστε $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : c \leq y \leq d$ και $\psi_1(y) \leq x \leq \psi_2(y)\}$ τότε το χωρίο A, λέγεται κανονικό χωρίο ως προς y (ή τύπου 2)

ΟΡΙΣΜΟΣ 3ος: Αν το χωρίο που αναφερόμαστε πληροί τους ορισμούς 1 και 2 συγχρόνως τότε λέμε ότι το χωρίο αυτό είναι ένα κανονικό χωρίο ως προς x και y (ή τύπου 3)

ΘΕΩΡΗΜΑ 1ο: Αν B είναι κανονικό χωρίο ως προς x, τότε

$$\int_B f(x,y)\, d(x,y) = \int_a^b \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\, dy\, dx.$$

ΘΕΩΡΗΜΑ 2ο: Αν A είναι κανονικό χωρίο ως προς y, τότε

$$\int_A f(x,y)\, d(x,y) = \int_c^d \int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)\, dx\, dy$$

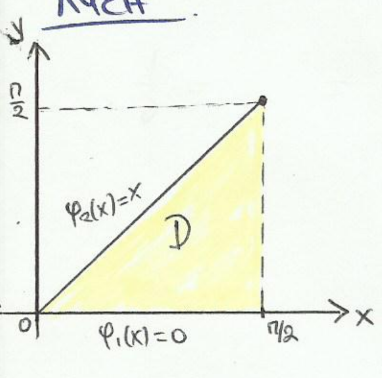
ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ [στον $\mathbb{R}^2$ και στον $\mathbb{R}^3$]

1). Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα:

$$\int_D (x^3 y + \cos x)\, d(x,y)$$

, όπου D είναι η τριγωνική περιοχή (με σύνορο το τρίγωνο) που αποτελείται από όλα τα (x,y) για τα οποία: $0 \leq x \leq \pi/2$ & $0 \leq y \leq x$.

ΛΥΣΗ



$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ και $0 \leq y \leq x\}$

Πρόκειται για χωρίο τύπου 1 με $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$ και $\varphi_1(x) = 0 \leq y \leq x = \varphi_2(x)$

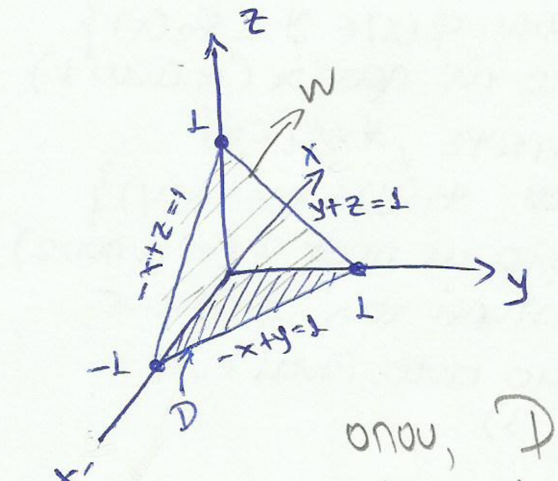
Άρα, από Θεώρημα 1:

$$\int_D (x^3 \cdot y + \cos x)\, d(x,y) = \int_0^{\pi/2} \int_0^x (t^3 \cdot y + \cos t)\, d(t,y) =$$

$$= \int_0^{\pi/2} \left[\frac{t^3 y^2}{2} + y \cdot \cos t\right]_0^x dx = \int_0^{\pi/2} \left(\frac{x^5}{2} + x \cdot \cos x\right) dx = \left[\frac{x^6}{12}\right]_0^{\pi/2} + \int_0^{\pi/2} x \cdot \cos x\, dx =$$

$$= \frac{\pi^6}{12 \cdot 64} + \left[x \cdot \sin x + \cos x\right]_0^{\pi/2} = \frac{\pi^6}{768} - \frac{\pi}{2} + 1.$$

2) Να βρεθεί ο όγκος του τετραέδρου το οποίο φράσσεται από τα επίπεδα $y=0$, $z=0$, $x=0$ & $y-x+z=1$



Έχουμε ότι

$$W=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : (x,y)\in D : 0\le z\le x-y+1\}$$

Αλλά, έχουμε και τον τόπο D.

όπου, $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : -1\le x\le 0 \text{ και } 0\le y\le 1+x\}$

ο οποίος είναι κανονικός ως προς x.

Έτσι, θα ολοκληρώσουμε την επιφάνεια

$z=x-y+1$ πάνω από το χωρίο D.

$$\text{ΟΓΚΟΣ ΤΕΤΡΑΕΔΡΟΥ} = \int_{-1}^{0}\int_{0}^{1+x}\int_{0}^{x-y+1} dz\,dy\,dx =$$

$$=\int_{-1}^{0}\int_{0}^{1+x}(x-y+1)\,dy\,dx =$$

$$=\int_{-1}^{0} x\int_{0}^{1+x}(1-y)\,dy\,dx =$$

$$=\int_{-1}^{0} x\left[y-\frac{y^2}{2}\right]_0^{1+x} dx =$$

$$=\int_{-1}^{0} x\left(1+x-\frac{(1+x)^2}{2}\right)dx = \frac{1}{6}.$$

ΘΕΩΡΗΜΑ 3º: Αν $M \subseteq \mathbb{R}^3$ κανονικό χωρίο ως προς το Oxy επίπεδο και $f: M \to \mathbb{R}$ συνεχής $\Rightarrow \int_M f(x,y,z)\, d(x,y,z) =$

$$= \int_D \left(\int_{X_1(x,y)}^{X_2(x,y)} f(x,y,z)\, dz \right) d(x,y)$$

Πιο συγκεκριμένα:

$$V(M) = \int_M 1\, d(x,y) = \int_D \left(\int_{X_2(x,y)}^{X_1(x,y)} 1\, dz \right) d(x,y) =$$

$$= \int_{x_0-r}^{x_0+r} \left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} \left(\int_{X_1(x,y)}^{X_2(x,y)} 1\, dz \right) dy \right) dx .$$

ΟΜΟΙΕΣ ΚΑΙ ΟΙ ΑΝΤΙΣΤΟΙΧΙΕΣ ΣΤΟΥΣ ΟΡΙΣΜΟΥΣ
ΑΛΛΑ Η ΜΟΝΗ ΑΛΛΑΓΗ ΕΙΝΑΙ ΟΤΙ ΤΩΡΑ ΕΙΝΑΙ ΣΕ ΠΕΠΛΕΓΜΕΝΗ ΜΟΡΦΗ!!!

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

1) Να επαληθευτεί ο τύπος που μας δίνει τον όγκο μιας μπάλας $\int_W 1\, d(x,y,z) = \frac{4}{3}\pi$, όπου $W = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2 \leq 1\}$

ΛΥΣΗ

Το χωρίο W είναι κανονικό χωρίο ως προς (x,y) και μάλιστα:

$$W = \{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : -1 \leq x \leq 1 ,\ -\sqrt{1-x^2} \leq y \leq \sqrt{1-x^2} \text{ και } -\sqrt{1-x^2-y^2} \leq z \leq \sqrt{1-x^2-y^2} \}$$

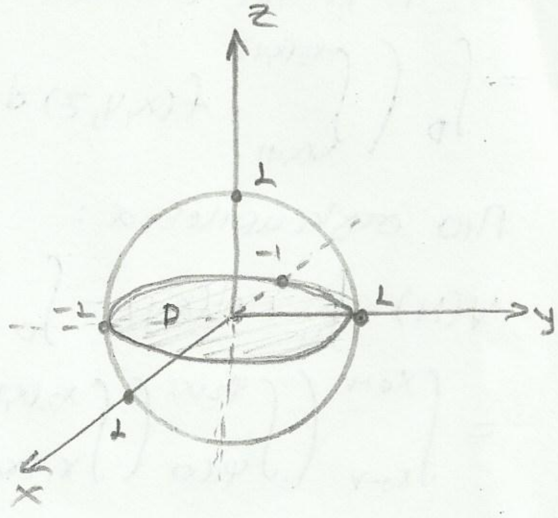
$$\int_W 1\, d(x,y,z) = \int_{-1}^{1} \left(\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{+\sqrt{1-x^2}} \left(\int_{-\sqrt{1-x^2-y^2}}^{\sqrt{1-x^2-y^2}} 1 \cdot dz \right) dy \right) dx =$$

$$= \int_{-1}^{1} \left(\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{+\sqrt{1-x^2}} \left[z \right]_{-\sqrt{1-x^2-y^2}}^{\sqrt{1-x^2-y^2}} \right) dy\, dx =$$

$$= 2 \int_{-1}^{1} \left[\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \sqrt{(1-x^2-y^2)}\, dy \right] dx \quad (1)$$

Αφού το x = σταθ στο ολοκλήρ. ως προς dy τότε θα γράφεται στη μορφή

$$\int_{-a}^{a} (a^2-y^2)^{1/2}\, dy = \frac{a^2}{2}\pi.$$



Άρα, έχουμε

$$\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} (1-x^2-y^2)^{1/2}\, dy = \frac{1-x^2}{2}\pi$$

Άρα, στο (1) ⇝

$$2\cdot\int_{-1}^{1} \frac{1-x^2}{2}\pi\, dx = \frac{4}{3}\pi.$$

2) Έστω w το χωρίο που φράσσεται από τα επίπεδα $x=0$, $y=0$, $z=2$ και την επιφάνεια $z=x^2+y^2$, $x,y\geq 0$. Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα

$$\int_{w} x\, dx\, dy.$$

Λύση

(κανονικό ως προς (x,y)) ⟵ περιοχή

$\gamma_1(x,y)=x^2+y^2$ και $\gamma_2(x,y)=2$

$\varphi_1(x)=0$ και $\varphi_2(x)=\sqrt{2-x^2}$, $a=0$ και $b=\sqrt{2}$

Δηλ. $w=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : 0\leq x\leq\sqrt{2},\ 0\leq y\leq\sqrt{2-x^2},\ x^2+y^2\leq z\leq 2\}$

Άρα, $$\int_{w} x\, dx\, dy = \int_0^{\sqrt{2}}\left(\int_0^{\sqrt{2-x^2}}\left(\int_{x^2+y^2}^{2} x\, dz\right)dy\right)dx =$$

$$= \int_0^{\sqrt{2}}\left(\int_0^{\sqrt{2-x^2}} x(2-x^2-y^2)\, dy\, dx\right) = \dots = \frac{8\sqrt{2}}{15}.$$